

# Werkzeuge zum Entwerfen und Konstruieren leichter Flächentragwerke

**Prof. Dr.-Ing. J. Ruth, Dipl.-Ing. T. Noack**  
Professur Massivbau II/ Professur Tragwerkslehre  
Bauhaus-Universität Weimar

## Zusammenfassung

Wenn die gewünschte Form eines gekrümmten Flächentragwerks von mathematischen Regelformen, wie z.B. die der Kugel, abweicht, wird die Findung einer geeigneten Form zum zentralen Problem des Entwurfs. Die gesuchte Form sollte in der Lage sein, die auftretenden Beanspruchungen über Membranspannungen abzutragen. In der Vergangenheit wurde dieses Problem zumeist über experimentelle Formfindungsmethoden gelöst. In der Entwurfsphase mußte deshalb bereits ein großer Aufwand betrieben werden, ohne daß zugleich Aussagen über die spätere wirkliche Beanspruchungshöhe getroffen werden konnten. Weiterhin blieb die Vielfalt der Varianten begrenzt. Mit der Planung des Olympiadachs München wurden erste Versuche unternommen, die o.g. Problematik mit Hilfe spezieller EDV-Programme, in denen vor allem geodätische Berechnungsalgorithmen die Grundlagen bilden, zu lösen. Der Einsatz eines FE-Programms hat den Vorteil, daß nach Abschluß der Formfindung die Struktur einer herkömmlichen statischen Analyse leicht zugänglich gemacht werden kann. Weiterhin besteht der Vorteil dieser Vorgehensweise darin, daß die Anwendung von FE - Programmen von vielen Ingenieuren in der Praxis bereits praktiziert wird und keine Kenntnisse über die Funktionsweise von meist relativ schwer bedienbaren Spezialprogrammen erworben werden müssen.

## 1 Leichtbau

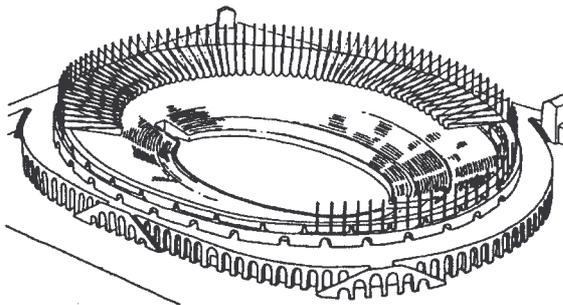
### 1.1 Historisches

Typische Vertreter des Leichtbaus sind Zelte und Überdachungen. Sie gehören zu den ältesten Bauformen des Menschen. Viele Zeltypen haben mehrere Jahrhunderte nahezu unverändert überdauert. Zelte gehören bis heute zu den leichtesten und effizientesten Konstruktionen zur Überdachung großer Flächen. Ein weitere leistungsfähige historische Tragwerksform zur Bildung eines Daches oder einer Decke sind Gewölbe. Da der Lastabtrag allein über Druckkräfte erfolgt, konnten auch mit relativ spröden, nur druckfesten Materialien große Spannweiten realisiert werden. Moderne Schalen und Kuppelkonstruktionen nutzen ebenfalls dieses Tragkonzept. Durch den Einsatz moderner Werkstoffe wie Stahlbeton lassen sich heute weit gespannte Schalenkonstruktionen auch mit sehr geringen Schalendicken herstellen. Die Tragwerke von Isler untermalen das eindrucksvoll.

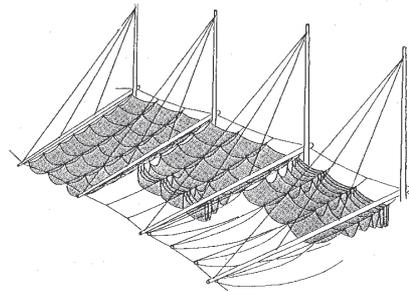
In den letzten Jahren erlebten auch Zelt-, Seilnetz- und Membrankonstruktionen erneut eine Renaissance. Am Beginn dieser Entwicklung stehen der Bau des Münchner Olympiades und frühe Tragwerke von Frei Otto, wie z.B. der Deutsche Pavillon auf der EXPO in Montreal.

Konstruktionen des Leichtbaus gehören mittlerweile fest zum Repertoire moderner Architektur.

Eine detaillierte Analyse historischer Konstruktionen des Leichtbaus wird in [1] vorgenommen.



**Bild 1a Amphitheater in Pompeji,  
Rekonstruktion des Velumdaches [1]**



**Bild 1b Detail**

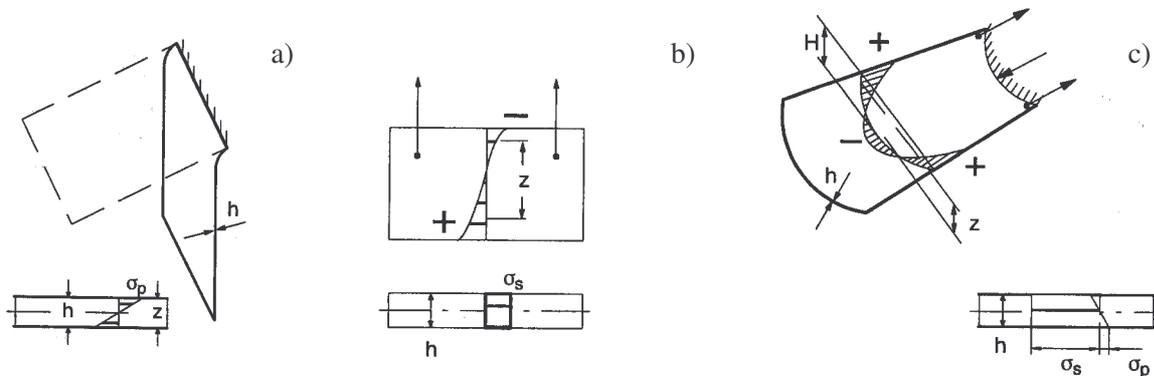
## 1.2 Funktionsprinzipien

Ziel des Leichtbaus sind Konstruktionen, die bei geringer Masse die an sie gestellten Anforderungen des Lastabtrags optimal erfüllen. Die Formen solcher Konstruktionen sind selten zufällig, sondern vielmehr Ergebnis von Optimierungsprozessen. Zahlreiche Vorbilder lassen sich in der Natur finden. So sind die Zellen als Grundbausteine der lebenden Natur Pneus. Sie bestehen aus einer Membran und einer fließfähigen Füllung (Plasma). Ihre Tragfähigkeit resultiert allein aus dem Vorhandensein eines Innendruckes. Ein weiteres leistungsfähiges Tragelement aus der Natur sind Fasern. Sie haben längliche Formen und sind ausschließlich zugbeanspruchbar. Gemeinsam mit druckbeanspruchbaren Substanzen gehören sie zu den entscheidenden „Bauteilen“ der lebenden Natur [1].

Besonders effektiv sind Konstruktionen, die Lasten, in Abhängigkeit vom Material, ausschließlich über Druck und oder über Zug abtragen. Der Lastabtrag durch Biegung ist demgegenüber weit weniger effizient, da er mit einem hohen Materialaufwand verbunden ist. Die Tragwerke des Leichtbaus berücksichtigen dieses Prinzip. Membranen und Seilkonstruktionen sind ausschließlich auf Zug beansprucht, Schalenkonstruktionen überwiegend druckbeansprucht.

Ein weiterer wichtiger Aspekt ist die Form. So verdanken Schalen ihre hohe Tragfähigkeit nicht primär der Festigkeit ihres Werkstoffs, sondern dessen räumlicher dreidimensionaler Anordnung. Das wird am Beispiel eines Blatt Papier in Bild 2 deutlich. Versucht man das Blatt als ebene Platte auskragen zu lassen, wird der dünne Querschnitt auf Biegung beansprucht und ist nicht in der Lage, sein Eigengewicht zu tragen. Dabei werden nur die Festigkeiten seiner Randfasern  $\sigma_p$  ausgenutzt. Wird das Blatt als Scheibe senkrecht gehalten, hat es eine deutlich höhere Tragfähigkeit, da die Dehnsteifigkeit der gesamten Fläche aktiviert wird. Die Spannungen der Scheibe  $\sigma_s$  wirken mittig auf den Querschnitt wie in einer Membran und werden deshalb als Membranspannungen bezeichnet. Eine Scheibe trägt zwar optimal, ist als oberer Raumabschluss aber völlig ungeeignet. Wird nun das Blatt zylindrisch gekrümmt, ist es in der Lage zu tragen und zu schützen. Auch hier wird die gesamte Fläche

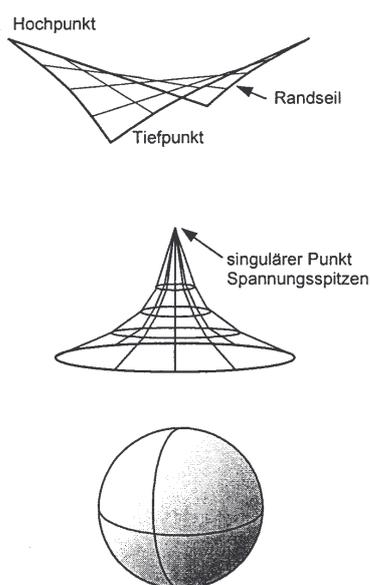
aktiviert. Die Höhe  $H$  der Scheibe ist jetzt größer als die Dicke  $h$  der Platte und damit sind die Membranspannungen  $\sigma_s$  größer als die Biegespannungen  $\sigma_p$ . Bei günstig geformten Schalen können die ungünstigen Biegespannungen vernachlässigbar klein gegenüber den Membranspannungen werden [2].



**Bild 2**

**Beanspruchung einer Platte (a), einer Scheibe (b) und einer oben offenen Zylinderschale (c) [2]**

Wie bereits erwähnt, zählen Membrantragwerke wegen ihrer optimalen Materialausnutzung zu den effektivsten und zugleich eleganten Konstruktionen. Der Lastabtrag erfolgt ausschließlich über Normalspannungen. Die charakteristische Form wird durch die Vorspannung geprägt, die nur dann voll wirksam aufgebracht werden kann, wenn die Fläche doppelt gekrümmt ist. Durch die Vorspannung wird erreicht, daß die Membran bei Wechselbeanspruchungen aus Wind nicht zum Flattern neigt und entstehende Druckkräfte bis zur Höhe der Vorspannung aufgenommen werden können. Die typischen Formen von Membrankonstruktionen sind in Bild 3 dargestellt.



Antiklastische Flächen:

Gegensinnig doppelt gekrümmt, negative Gauß'sche Krümmung

4-Punkt Segel

Radialfläche

Synklastische Flächen:

Gleichsinnig doppelt gekrümmt, positive Gauß'sche Krümmung

Als vorgespannte Membran nur mit Flächenlast möglich, z.B. mit Innendruck.

**Bild 3 Gekrümmte Flächen [3]**

## 1.3 Werkstoffe

Das Verhalten der klassischen Baumaterialien zeichnet sich, von wenigen Ausnahmen abgesehen, dadurch aus, daß es für den Gebrauchslastbereich als linear elastisch und isotrop angenommen werden kann. Die Materialien der im Zelt- und Membranbau verwendeten Werkstoffe hingegen zeigen ein völlig anderes, oft problematisches Verhalten [1]. Sie sind:

- nichtlinear bezüglich des Spannungs - Dehnungsverhaltens
- anisotrop, d.h., das Material zeigt zwei ausgeprägte Eigenrichtungen, die Richtungsabhängigkeiten aller mechanisch wichtigen Eigenschaften zur Folge haben
- nichtelastisch, d.h., das Verhalten hängt wesentlich von der Belastungsgeschichte ab

Tafel 1 zeigt die wichtigsten Eigenschaften üblicher Membranwerkstoffe.

Material Gewebe/ Beschichtung	Gesamt- gewicht	Feuer- bestän- digkeit	Transluzenz 0,44 - 0,66 m	Festigkeit Kette/Schuß	Bruch- dehnung Kette/ Schuß	Weiter- reiß- festigkeit	Knick- bestän- digkeit
	[g/m <sup>2</sup> ]		[%]	[N/50 mm]	[%]	[N]	
Polyester/PVC							
Typ I	800	B 1		3000/3000	15/20		350 sehr gut
Typ III	1050	B 1		5750/5100	15/25		950 sehr gut
Typ V	1450	B 1		9800/8300	20/30		1800 sehr gut
Glas/PTFE	800 1270	A 2 A 2	4,0 - 13,0 4,0 - 13,0	3500/3000 6600/6000	7/10. 7/10.		300 ausreichend 570 ausreichend
Aramid/PVC (kein Standard- produkt)	900 2020	B 1 B 1	prinzipiell keine	7000/9000 24500/24500	5/6. 5/6.		700 gut 4450 gut
Aramid/PTFE (kein Standard- produkt)	Eigen- schaften nach Kunden- vorgabe	A 2	prinzipiell keine		2 bis 7		
Baumwoll- Polyester	350 520	B 2 B 2		1700/1000 2500/2000	35/18 38/20		60 sehr gut 80

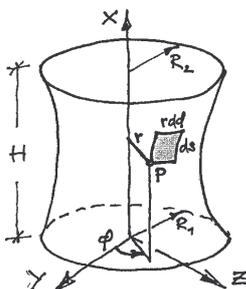
**Tafel 1**

## 2 Formfindung und Berechnung leichter Flächentragwerke

### 2.1 Analytische Methoden

Geschlossene Lösungen zur Berechnung von Flächentragwerken existieren nur für wenige Standardfälle. Für den Bereich der Schalenkonstruktionen gilt das z.B. für Zylinder- und Kugelschalen, die mit Differentialgleichungen berechnet werden können.

Es existieren ebenfalls geschlossene Lösungen für einige wenige Minimalflächen. Ein Beispiel ist der in Bild 4 dargestellte Kantenoid.



**Bild 4 Kantenoid**

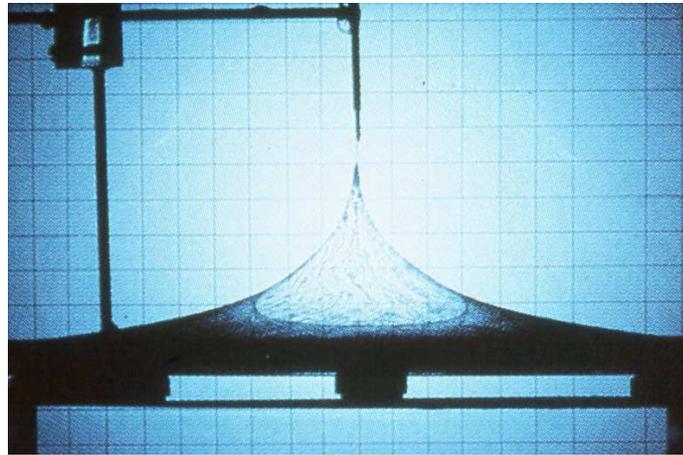
## 2.2 Experimentelle Methoden

Zum Finden freier Formen, die den Lastabtrag allein über Membranspannungen ermöglichen, mußten andere Hilfsmittel eingesetzt werden. Im Anfangsstadium des Leichtbaus standen im Gegensatz zu heute noch keine numerischen Methoden zur Verfügung. Daher hatte die experimentelle Formfindung eine herausragende Bedeutung.

Mittels Hängemodellen konnten durch Umkehrung ideale Formen für Schalenkonstruktionen gefunden werden (Bild 5). Zum Entwurf und der Formfindung von Membrankonstruktionen kamen u.a. Seifenhautmodelle zum Einsatz. Dabei kann relativ einfach die optimale Form für gegebene Randbedingungen gefunden werden (Bild 6). Eine andere Methode zur Formfindung innerhalb des architektonischen Entwurfs stellten Modelle aus Geweben dar (Bild 7). Allen experimentellen Methoden gemeinsam ist das Problem, die gefundene Form für den weiteren Entwurfs- und Berechnungsprozess zu vermessen (Bild 8) und in den weiteren Schritten die Schnittkräfte für alle Lastfälle zu berechnen, sowie den Zuschnitt der Membran zu unterstützen.



**Bild 5 Hängemodell von Isler**



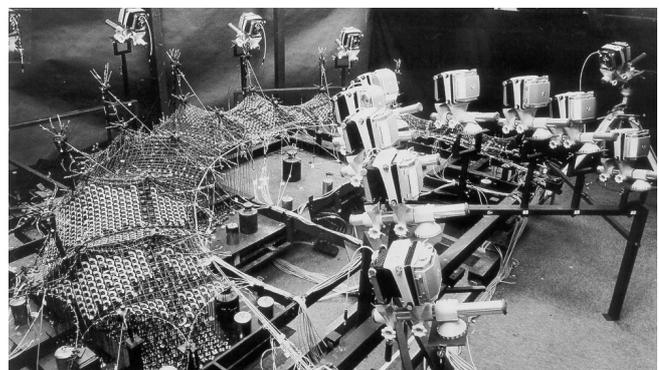
**Bild 6 Seifenhautmodell von Frei Otto**

Das gelang erst mit Hilfe der numerischen Methoden ohne Probleme.

Heute werden die experimentellen Methoden wie Seifenhautmodelle und Gewebemodelle in erster Linie noch effektiv im Entwurfsprozeß eingesetzt. So können in einem relativ frühen Stadium einfach verschiedene Varianten auf ihre architektonischen Aussagen und Erscheinungsformen hin überprüft werden.



**Bild 7 Architekturmodell aus Tüll,  
Olympiadach München von Behnisch**



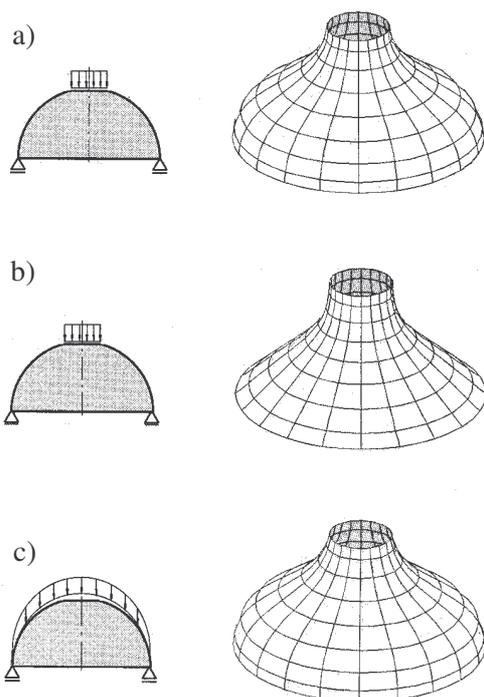
**Bild 8 Meßmodell des Stadionsdaches**

## 2.3 Numerische Methoden

Aufgrund der Notwendigkeit, neben dem Finden der Form die Tragwerke auch zu berechnen und die Geometrie genau zu beschreiben (Zuschnitt, Schalungsgeometrie), sind numerische Methoden klar im Vorteil. Nur so ist heute noch eine ökonomische Erstellung von Leichtbauten möglich. Es werden dabei verschiedene Ansätze verfolgt. Die drei wichtigsten sollen nachfolgend kurz erwähnt werden.

### 2.3.1 Optimierung

Die natürlichen Formen des Leichtbaus entstehen in einem „Selbstbildungsprozess im Spiel der Kräfte“, wie es Frei Otto formuliert. So liegt es nahe, die den physikalischen Experimenten zugrundeliegenden Prinzipien mit mechanischen und mathematischen Verfahren zu erfassen und mit modernen computerorientierten Methoden abzubilden. K. U. Bletzinger entwickelte im Rahmen einer Dissertation [4] ein Verfahren zur Formfindung auf Basis der mathematischen Optimierung (Bild 9).

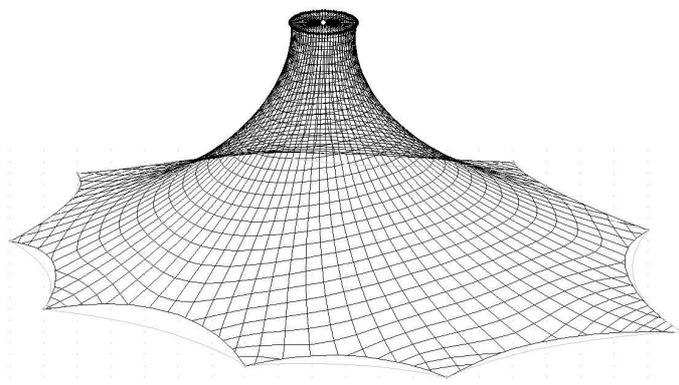


**Bild 9 System, Belastung und optimale Form eines Schalentragswerks mit einer Laternenlast bei verschiedenen Auflagersituationen (a, b) und unter Eigenlast (c) [4]**

### 2.3.2 Kraftdichtemethode

Eine rechnerische, computergestützte Formfindungsmethode, bei der sowohl die Architekten - Vorgaben als auch kräftemäßige und materialspezifische Vorgaben des Ingenieurs berücksichtigt werden können, ist die von Geodäten entwickelte Kraftdichtemethode. Ziel ist die Berechnung von Form und Geometrie (speziell die des Zuschnitts) eines gleichmaschigen Netzes im vorgespannten Zustand unter Berücksichtigung bestimmter Bedingungen und Grenzwerte für das Verhalten unter Last.

Hinter einer solchen Formfindungsstrategie im Computer steckt ein umfassendes Potential an speziellen Rechenprogrammen und Berechnungsalgorithmen. Diese sind, ursprünglich ausgehend von Methoden der Ausgleichsrechnung, seit der Planung und Berechnung der Olympiadächer (München 1972) ständig weiterentwickelt worden [1].

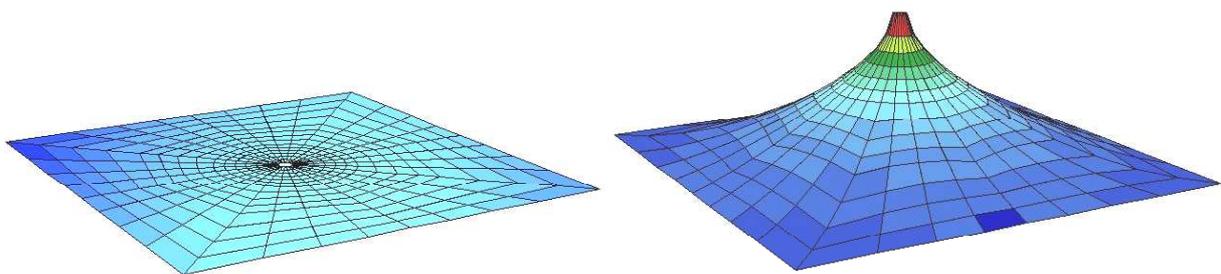


**Bild 10 Formfindung mit CADISI**

### 2.3.3 Methode der Finiten Elemente

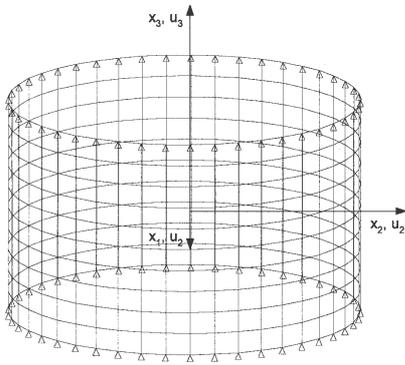
Berechnungsprogramme auf Basis der Methode der finiten Elemente stellen ein weiteres Werkzeug zur Berechnung von Tragwerken des Leichtbaus dar. Neben dreidimensionalen Stab- und Schalen-Elementen zur Berechnung von Stabwerken und Schalen existieren mittlerweile auch leistungsfähige Membran-Elemente. Diese eröffnen eine weitere Möglichkeit für die computergestützte Formfindung.

Im FE-Programmpaket der Fa. SOFISTIK können mit Hilfe der implementierten Membranelemente beliebige Formen gefunden werden (Bild 11). Bei Ansatz isotroper Vorspannungen entstehen so Seifenhäute, sonst davon abweichende Formen.

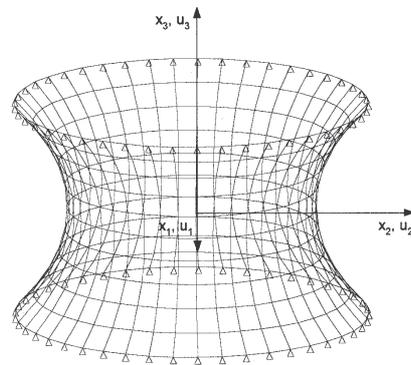


**Bild 11 Formfindung durch Lagerverschiebung**

Bild 12 und 13 zeigen die Berechnung eines Kantenoids mit Hilfe dieser Methode. Die für diesen Spezialfall existierende analytische Lösung ( $f(x)$ ) stimmt dabei sehr gut mit der numerisch gefundenen Lösung (FEM) überein (Tafel 2)



**Bild 12 Zylinder als Ausgangsform eines Kantenoids**



**Bild 13 Kantenoid**

x	f(x)	FEM
-1.250	2.001	2.003
-1.017	1.792	1.793
-0.774	1.627	1.626
-0.522	1.507	1.508
-0.263	1.434	1.435
0	1.409	1.410
0.263	1.434	1.435
0.522	1.507	1.508
0.774	1.627	1.626
1.017	1.792	1.793
1.250	2.001	2.003

**Tafel 2**

Neben der Formfindung durch Formulierung einer Anfangsvorspannung können auch durch Definition von Innendrücker optimale Formen gefunden werden.

Ist die Form der Membran gefunden, können mit dieser als Ausgangssystem die realen Lastfälle gerechnet werden. Dabei muß die Membran auf Druck ausfallen. Weitere Textileigenschaften werden meist durch ein vereinfachtes linear-elastisches orthotropes Materialgesetz erfaßt. Die in realen Systemen vorhandenen, konstruktiv erforderlichen Randversteifungen mit Randseilen, innenliegende Seile oder Druckbögen können mit Hilfe der FE-Methode wirklichkeitsnah berücksichtigt werden [5].

### 3 Anwendungsbeispiele

#### 3.1 Radom Wachtberg Werthhoven

Radome zum Schutz hochempfindlicher großer Antennen, vornehmlich Parabolantennen für Nachrichtenübermittlung, als Radargeräte oder Radioteleskope, wurden Ende des zweiten Weltkrieges in den USA entwickelt. Zunächst waren es luftgetragene Radome mit verhältnismäßig dicker Kunststoffhaut und somit hoher Durchgangsdämpfung. Diese negativen Eigenschaften erforderten bald danach die Entwicklung besserer Systeme, die schließlich zu den Netzwerken, bespannt mit extrem dünner Kunststoffhaut, führten. Auf amerikanische Entwicklungen aufbauend entstand nach intensiver Weiterentwicklung Anfang der siebziger Jahre das Radom der Parabolantenne Werthhoven (Bild 14) [6].

Die Kuppel mit einem Durchmesser von 49 m besteht aus 401 Knoten und 1120 Stäben aus St 52 mit einer Länge von 3,9 bis 5,58 m. Das Netzwerk hat eine unregelmäßige Struktur. Die Stabquerschnitte weisen im unteren Bereich eine Wanddicke von 6 mm und im oberen Bereich von 4,5 mm auf und sind in Bild 16 dargestellt.



Bild 14 Netzwerkkuppel mit 49 m Durchmesser

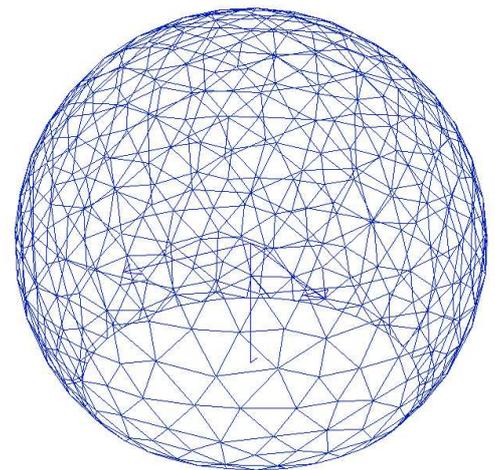


Bild 15 3D Stabmodell

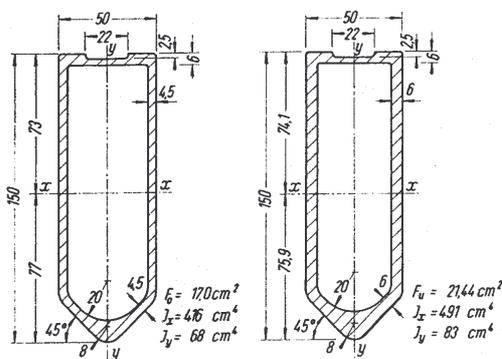
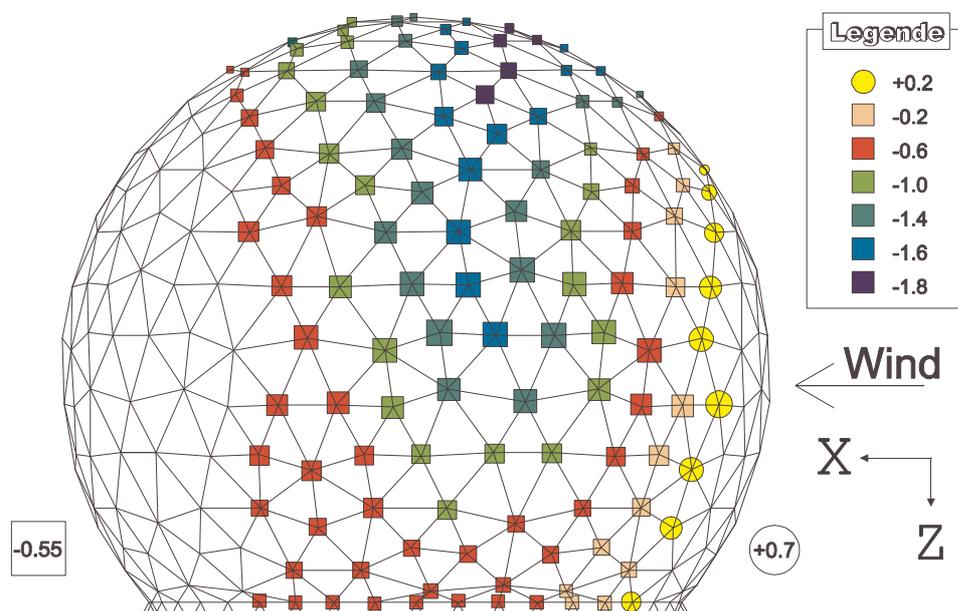


Bild 16 Stabquerschnitte

Die Kunststoffhaut ist fest mit den Stäben verbunden und dient gleichzeitig als Knickaussteifung der Stäbe in der Kuppelenebene. Um Flattererscheinungen zu verhindern, kann windabhängig ein geringer Überdruck in der Kuppel erzeugt werden.

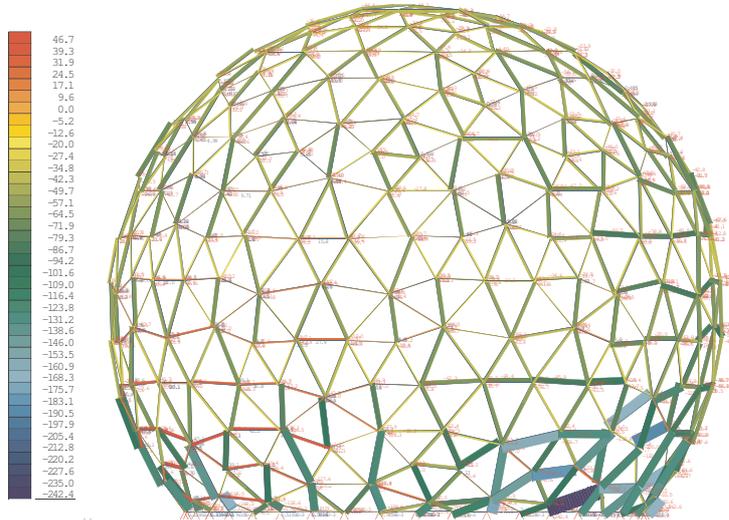
Um die Radomtragfähigkeit unter erhöhten Windlasten nach EC1 zu prüfen und einen eventuellen Sanierungsbedarf zu klären, wurde im Jahr 2000 eine statische Neuberechnung durchgeführt. In Bild 17 sind die angesetzten Windbeiwerte und ihre Verteilung über die Kuppel dargestellt.

Die Netzkuppelstruktur ist als räumliches Stabwerk abgebildet (Bild 15). Die vom Vermesser ermittelten Knotenkoordinaten werden als IST-Koordinaten angesehen und für die Programmeingabe verwendet. Da es sich hierbei um eine Vermessung der Knoteninnenkanten der Struktur handelt, wurden die Werte zuvor so korrigiert, daß die Stabmittelachsen durch die Daten beschrieben werden. Weiterhin wurden die vom Vermesser als kartesische Koordinaten gelieferten Werte in Kugelkoordinaten umgerechnet. Damit wird eine Kontrolle der Einhaltung der Kugelform möglich. Die dabei festgestellten Abweichungen von der exakten Kugelform sind vernachlässigbar. Die Verbindungen in den Knoten werden als biegesteif angenommen. Die Auflagerpunkte werden auf der sicheren Seite liegend als gelenkig angenommen, da das Funktionieren einer Einspannung einen nicht nachgewiesenen, einwandfreien Zustand der Befestigungskonstruktion voraussetzt. Die auf den Profilen befestigte Kunststoffhaut wird nur in Form einer Eigenlasthöhung berücksichtigt. Das in Form von Versuchen nachgewiesene Funktionieren der Haut als Knickaussteifung in der schwachen Achse der Stabprofile wird als weiterhin gegeben angenommen, da defekte Kunststoffhautelemente in der Vergangenheit sofort ausgetauscht wurden.



**Bild 17** Windbeiwertverteilung für die Berechnung

Die statische Neuberechnung des Stabtragwerks des Radoms Werthhoven zeigte, daß es sich bei der Netzwerkkuppel um ein ausgesprochen leistungsfähiges, effektiv dimensioniertes Tragwerk handelt. Beim Ansatz von detaillierten Windlasten nach EC1 und dem Teilsicherheitskonzept zeigte sich, daß die Tragfähigkeit der schlanken Stäbe ausgenutzt wird.



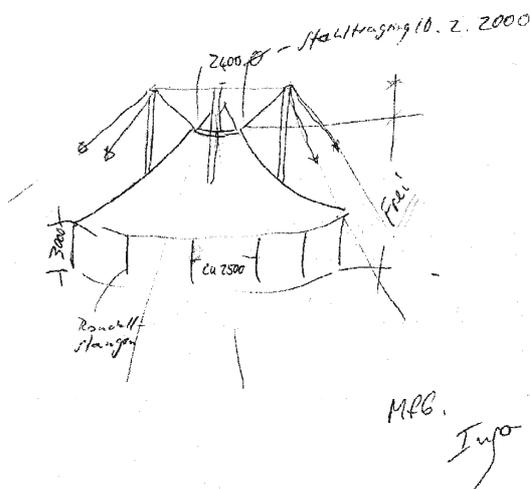
**Bild 18**  
Stabnormalkräfte min N  
aus Lastfallüberlagerung

### 3.2 Zelt auf der Expo

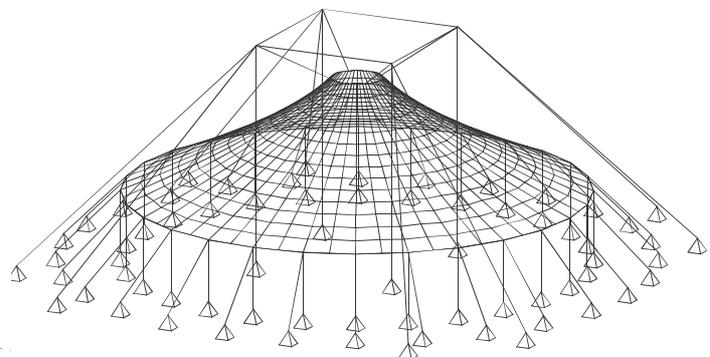
Das folgende Beispiel zeigt die Anwendung des Programmsystems SOFISTIK bei der Formfindung und Berechnung einer Zeltstruktur.

Die Aufgabe wird durch eine Entwurfsskizze des Architekten formuliert (Bild 19). Das Zelt soll einen Durchmesser von 22 m haben. Es wird durch 4 Masten und 28 Rondellstangen mit jeweils einer Abspannung getragen.

Die Berechnung erfolgt mit dem Programm ASE. Das gesamte Zelt mit der Membran, den Stützen und den Abspannungen wird im FE-Modell simuliert (Bild 20). Die Geometrie der Membran entsteht durch das „hochziehen“ des zentralen Rings.

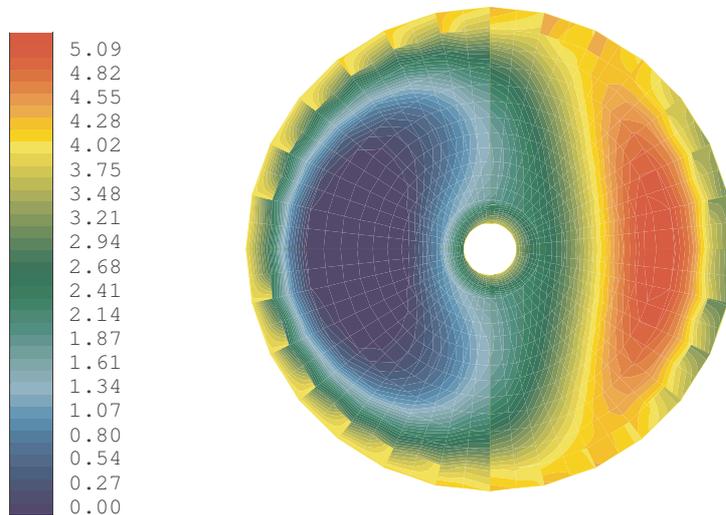


**Bild 19** Entwurfsskizze des  
Architekten



**Bild 20** FE Modell (Membran und Stahltagwerk)

Nachdem die Formfindung abgeschlossen ist, erfolgt das Einfrieren der gefundenen Geometrie. Nach Eingabe der relevanten Lastfälle kann der statische Nachweis der Struktur erfolgen. Als Belastungen sind bei dem Zelt Wind und Eigenlast angesetzt. Auf den Ansatz einer Schneelast wird aufgrund der geforderten Mindesttemperatur von 12° im beheizten Zeltinneren verzichtet.



**Bild 21 Membrankraft  $n_{xx}$  Lastfall Wind**

Der Einsatz eines FE-Programms SOFISTIK hat im vorgestellten Fall den Vorteil, daß nach Abschluß der Formfindung das nun vorhandene FE - Modell zur statischen Berechnung leicht genutzt werden kann. Das ermöglicht in der Praxis einen schnellen, effizienten Formfindungs- und Bemessungsprozess.



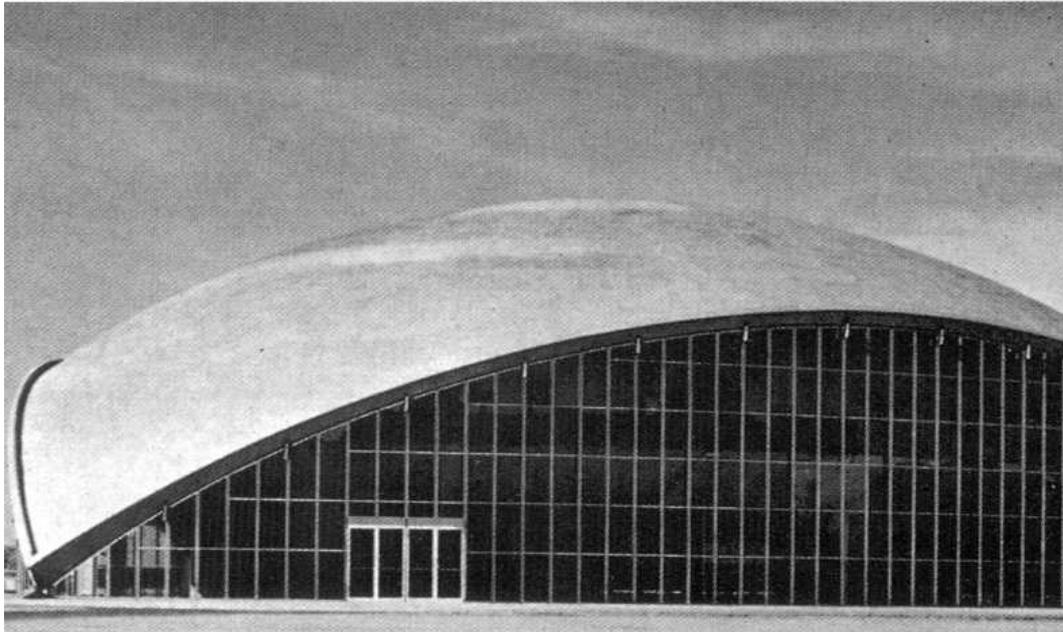
**Bild 22 Fertiggestelltes Zelt**

Neben dem Gesamttragwerk hat die Konstruktion der Detailpunkte im Membranbau besonderes Gewicht.

Die materialgerechte Ausbildung von Verankerungsdetails der Membran hat entscheidenden Einfluß auf die statische und ästhetische Qualität des Membrantragwerks [7].

### 3.3 Vergleichsrechnungen zu ausgeführten Beispielen

Neben dem Entwurf und der Berechnung neuer Tragwerke stellen FE - Programmsysteme auch ein leistungsfähiges Werkzeug zur Nachrechnung bereits ausgeführter Tragwerke dar. Im Rahmen einer Diplomarbeit wurden an der Bauhaus-Universität Weimar der Einfluß der Rand- und Auflager-bereiche auf das Tragverhalten von Rotationsschalen untersucht [8]. Die Analyse der berechneten Varianten erlaubt einen interessanten Einblick in Details des Tragverhaltens. Das soll hier am Beispiel des Kresge Auditoriums des Massachusetts Institute of Technology dargestellt werden (Bild 23).



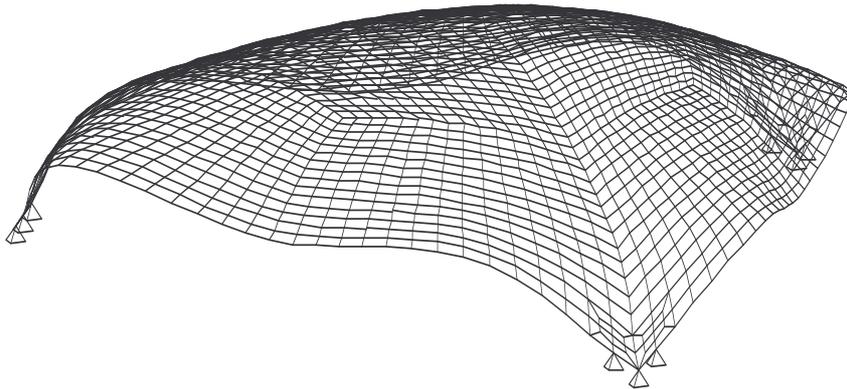
**Bild 23 Kresge Auditorium des Massachusetts Institute of Technology**

Die Schalenkonstruktion wurde vom Architekt Eero Saarinen und dem Ingenieur Amman Whitney 1955 in Cambridge, USA, gebaut. Im Trend dieser Zeit lagen Schalenkonstruktionen mit nur wenigen Lagerpunkten. Im vorliegenden Fall besitzt die Kugelschale drei Auflager. Der Abstand der Lager beträgt ca. 48 m und die maximale Höhe der Schale im Zenit beträgt 15 m. Ihre Dicke wächst von

8,5 cm in der Mitte auf 14 cm im Randbereich an. Das Auditorium beherbergt zwei Säle, einen mit 1200 Plätzen und einen kleineren mit 200 Sitzplätzen.

Im FE Modell besitzt die Schale eine konstante Dicke von 20 cm und einen Randbalken von 50x100 cm.

Bei der Auswertung der gebauten Geometrie wird deutlich, daß die vorliegende Struktur Lasten nicht allein über den Membranspannungszustand abtragen kann. Es entstehen erhebliche Momente und Verformungen im Bereich des Randbogens (Bild 24).



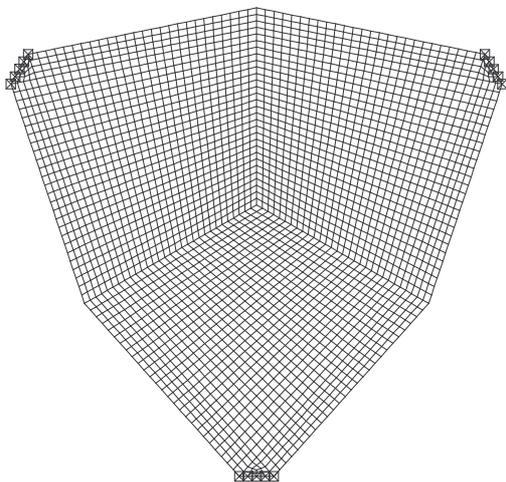
**Bild 24 Verformte Struktur unter Eigengewicht (mehrfach überhöht)**

Ziel von Variantenuntersuchungen war nun, die Schalenkonstruktion im Hinblick auf die Höhe der Momente und die Verformungen zu optimieren.

Dazu wurden verschiedene Konstruktionsvarianten erneut berechnet.

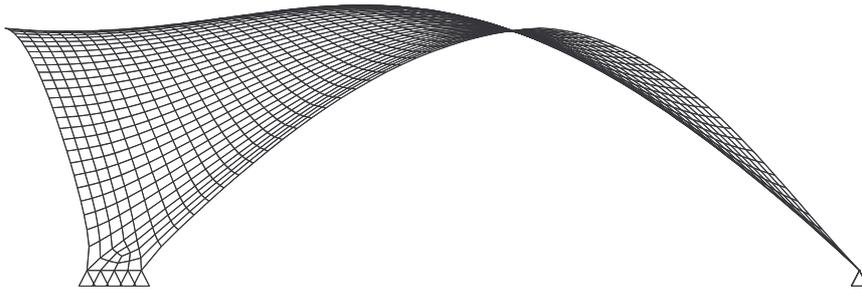
In der ersten Variante erfolgt eine Abstützung des Randträgers. In der zweiten Variante wird die Schale durch Rippen verstärkt. Beide Varianten führen zu keiner grundlegenden Verringerung von Momenten und Verformungen.

Mit dem Werkzeug der Formfindung soll nun in einer dritten Variante eine grundlegend neue, optimierte Schalenform gefunden werden, die den Anforderungen besser gerecht wird. Bild 25 zeigt das Ausgangssystem der Formfindung.



**Bild 25 Ebene Ausgangsmembran für Formfindung**

Zur Reduzierung singulärer Spannungen erfolgt eine gelenkige Lagerung auf fünf Knoten pro Auflager. Der Formerzeugende Lastfall ist das Eigengewicht. Das Ergebnis des Formfindungsprozesses ist in Bild 26 dargestellt.



**Bild 26 Schalengeometrie nach der Formfindung**

Die gefundene Form zeichnet sich durch ein leichtes Aufwölben des freien Randes aus. Bei einer erneuten statischen Analyse des neuen Systems wird im Lastfall Eigengewicht erwartungsgemäß die Momentenbelastung verschwindend gering. Für alle weiteren Lastfälle bleibt sie ebenfalls sehr niedrig.

Damit konnte beispielhaft gezeigt werden, daß mit modernen numerischen Methoden Formen gefunden werden können, die auch unter extremen Randbedingungen optimale Trageigenschaften besitzen.

#### **4 Literatur**

- [1] G. Brinkmann: „Leicht und Weit“, Ergebnisse aus dem SFB 64, Universität Stuttgart
- [2] E. Heinle, J. Schlaich: „Kuppeln aller Zeiten – aller Kulturen“, Stuttgart, 1996, Deutsche Verlags-Anstalt
- [3] K. U. Bletzinger: „Theoretische Grundlagen der numerischen Formfindung von Membrantragwerken und Minimalflächen“, Betonkalender 2000
- [4] K. U. Bletzinger: „Formoptimierung von Flächentragwerken“, Dissertation, Stuttgart, 1990
- [5] SOFISTIK, Membrantragwerke - Formfindung und statische Analyse
- [6] W. Schönbach: „Als Netzkuppel ausgebildetes Radom mit 49 m Durchmesser“, Der Stahlbau, 2/1971
- [7] E. Bubner: „Membrankonstruktionen Verbindungstechniken“, Essen, 1997, Druckerei Wehlmann GmbH
- [8] G. Kranich: „Einfluß der Rand- und Auflagerbereiche auf das Tragverhalten von Rotationsschalen“, Diplomarbeit, Weimar, 2000